Вељко Ћировић

Материјал за додатну наставу математике са ученицима VIII разреда

Тема: Елементарни проблеми екстремних вредности

1 *Увод*

Екстремне вредности неке величине су њена највећа и њена најмања вредност. Када се говори о екстремним вредностима неког израза мисли се на конкретну вредност (најмању или највећу) коју тај израз има када се уместо променљиве, или више њих у њему, замене одговарајуће бројчане вредности. Тако на пример, израз

$$3 - x^2$$

има највећу вредност за $x = 0$ и она је једнака $3 - 0^2 = 3$.

2 *Решени задаци*

1. За које вредности x, y и z израз $4x^2 + y^2 + 49z^2 + 12x + 10y + 28z$ има најмању вредност?

   Решење: Трансформишимо овај израз:

$$4x^2 + y^2 + 49z^2 + 12x + 10y + 28z =$$

$$= \underbrace{4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9} - 9 + \underbrace{y^2 + 2 \cdot y \cdot 5 + 25} - 25 + \underbrace{49z^2 + 2 \cdot 7z \cdot 2 + 4} - 4 =$$

$$= (2x + 3)^2 + (y + 5)^2 + (7z + 2)^2 - 38$$

   Поента је била у претходном делу решења у коме смо направили квадрате одговарајућих бинома. Квадрати бинома су нам у оваквим задацима јако корисни јер се користи њихова веома важна особина да су увек ненегативни. Сада је јасно да ће полазни израз имати најмању вредност -38 за $(2x + 3)^2 = 0$, $(y + 5)^2 = 0$ и $(7z + 2)^2 = 0$. Односно за $x = -\dfrac{3}{2}$, $y = -5$ и $z = -\dfrac{2}{7}$. Овим је задатак решен. ▲

2. Ако је збир дужина три ивице које полазе из истог темена правилне 2012-стране призме 40 cm, колика је највећа могућа површина омотача ове призме?

   Решење: Означимо основну ивицу ове призме са a, а бочну са s. Из истог темена призме полазе две основне и једна бочна ивица, па важи

$$2a + s = 40$$

   Омотач ове призме чини 2012 правоугаоника, па је његова површина

$$M = 2012as$$

   А ово можемо другачије записати, користећи претходну релацију $2a + s = 40$ из које је $s = 40 - 2a$, и добијамо

$$M = 2012a(40 - 2a) = 2012 \cdot (-2)(a^2 - 20a) = -4024(a^2 - 20a + 100 - 100) =$$

$$= -4024((a - 10)^2 - 100) = -4024(a - 10)^2 + 402400$$

А овај израз ће бити највећи када је $(a-10)^2 = 0$. То јест када је $a = 10$. Како би за овакво a бочна ивица била

$$s = 40 - 2a = 40 - 2 \cdot 10 = 20$$

то је највећа могућа површина омотача ове призме $M = 2012 \cdot 10 \cdot 20 = 40240\ cm^2$. ▲

3. Ако је висина правилне шестостране призме за 2 dm дужа од њене основне ивице, одредити запремину овакве призме код које је дужа дијагонала најмања могућа.

Решење: Дат нам је услов за однос висине и основне ивице: $H = a + 2$. За дијагоналу правилне четворостране призме важи: $D^2 = H^2 + (2a)^2$. Искористимо прву формулу убацујући је у другу.

$$D^2 = (a+2)^2 + (2a)^2 = 5a^2 - 4a + 4 = 5\left(a^2 - \frac{4}{5}a + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) + 4 =$$

$$= 5\left(\left(a - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right) + 4 = 5\left(a - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} + 4 = 5\left(a - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}$$

Сада је јасно да ће дијагонала бити најкраћа ако је $\left(a - \frac{2}{5}\right)^2 = 0$ то јест $a = \frac{2}{5}\ dm = 4cm$, а тада је $H = 24\ cm$.

На крају, запремина призме ће бити

$$V = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H = 3\frac{4^2\sqrt{3}}{2} \cdot 24 = 576\sqrt{3}\ cm^3.▲$$

4. Колика је највећа вредност количника који се добије када се троцифрени број подели са збиром својих цифара? (Републичко такмичење 1997.)

Решење: Посматрајмо троцифрене бројеве $x = \overline{abc}$, а највећи количник ћемо тражити из

$$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+99a+9b}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}$$

Сада анализирамо разломак $\dfrac{99a+9b}{a+b+c}$. Он ће бити највећи ако му је именилац најмањи. Узмимо $c = 0$, и за такав одабир цифре c добијамо

$$\frac{99a+9b}{a+b+c} = \frac{99a+9b}{a+b} = 9 + \frac{90a}{a+b}$$

а последњи разломак $\dfrac{90a}{a+b}$ је највећи када је $b = 0$, и он постаје $\dfrac{90a}{a}$.

Пошто је цифра a почетна цифра броја $x = \overline{abc}$, то она мора бити различита од нуле, и како разломак $\dfrac{90a}{a}$ има једнаке вредности 90 за све $1 \leqslant a \leqslant 9$, то су бројеви који обезбеђују наше решење: $100, 200, \ldots, 900$. А тражени највећи количник троцифреног броја и збира његових цифара је 100. ▲

5. Одредити x за које израз $(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)$ има најмању вредност и колика је она.

Решење: Трансформишимо дати израз помноживши први и четврти, а затим други и трећи фактор:

$$(x+1)(x+3)(x+4)(x+6) = (x^2+7x+6)(x^2+7x+12) = (x^2+7x+6)(x^2+7x+6+6)$$

А ово последње можемо записати као:

$$(x^2+7x+6)(x^2+7x+6+6) = (x^2+7x+6)^2 + 6(x^2+7x+6)$$

Па онда можемо и наместити квадрат бинома тако што ћемо додати 3^2 и одузети 3^2:

$$(x^2+7x+6)^2+6(x^2+7x+6)=(\underline{x^2+7x+6})^2+2\cdot\underline{\underline{3}}\cdot(\underline{x^2+7x+6})+\underline{\underline{3}}^2-3^2=(\underline{x^2+7x+6}+\underline{\underline{3}})^2-3^2$$

Пошто је наш рад био поступна трансформација полазног израза, то смо добили:

$$(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)=(x^2+7x+9)^2-3^2$$

А ово је већ довољно да закључимо да ће наш израз $(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)$ имати најмању вредност када се $(x^2+7x+9)^2$ анулира, то јест, када је $x^2+7x+9=0$.
Размотримо то сада детаљније.

$$x^2+7x+9=x^2+2\cdot\frac{7}{2}x+9+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

Решење самог задатка се назире. Потребно је још само утврдити када је $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}=0$. А то је, већ, једноставно. Једначина $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}=0$ је еквивалентна једначини $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$, па је $x+\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$ или $x+\frac{7}{2}=-\frac{\sqrt{13}}{2}$, односно $x=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ или $x=-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$. То су тражене врдности x-а за које полазни израз има најмању вредност, а та вредност је -9. ▲

3 *Задаци за вежбу*

6. Дат је ромб странице $a=10\ cm$ и једног унутрашњег угла $60°$. У њега је уписан правоугаоник, чија темена припадају страницама ромба, а странице су му паралелне са дијагоналама. Одредити површину оваквог правоугаоника који има најкраћу могућу дијагоналу.