Вељко Ћировић

ПРОСТИ БРОЈЕВИ

Материјал да додатну наставу Математике.

20. новембар 2012.

Цео број $p > 1$ је *прост*, ако нема ниједан делилац различит од 1 и од самога себе. Број који није прост је *сложен.*

Пример. Првих неколико простих бројева су: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$.

Напомена. Број 1 није ни прост ни сложен.

Сваки сложени број може се представити као производ простих бројева.

Пример. Сложени број 42 можемо представити као $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, а број 120 као $120 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Представљање сложеног броја у виду производа простих чинилаца, као што је то наведено у претходном примеру је његова *канонска факторизација (растављање).*

РЕШЕНИ ЗАДАЦИ

1. Ако је p прост број већи од 3 доказати да је $p^2 - 1$ дељив са 24.

   Решење. С обзиром да је p прост, он је и непаран, па је

   $$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$$

   производ два парна броја, који су и узастопни парни бројеви. Па је један од њих дељив са 2 а други са 4, зато је и њихов производ $(p + 1)(p - 1)$ дељив са 8. Такође, пошто је p прост број он сигурно није дељив са 3, а $p - 1$ и $p + 1$ су му претходник и следбеник, од којих је један сигурно дељив са 3. Па како смо показали да је овај производ дељив са 8 и са 3, то је он дељив и са 24. ■

2. За који прост број p је и број $8p^2 + 1$ такође прост?

Решење. Ако је $p = 2$ тада је $8 \cdot 2^2 + 1 = 33$ а ово је сложен број. Ако је $p = 3$ онда је $8 \cdot 3^2 + 1 = 73$ прост број. Нека је, сада, p прост број већи од 3. Он ће тада бити облика $p = 3k + 1$ или $p = 3k - 1$. Сада је:

$$8(3k \pm 1)^2 + 1 = 72k^2 \pm 48k + 9$$

а овај број је сложен јер је дељив са 3. Па закључујемо да је $8p^2 + 1$ прост број, једино када је $p = 3$. ∎

3. Ако је p прост број доказати да је $p^{2011} + p^{2013}$ сложен.

   Решење. Ако је $p = 2$ тада је $2^{2011} + 2^{2013}$ збир два парна броја, који је паран број, па тиме и сложен. Нека је број прост број $p \geq 3$, он је онда и непаран. Али, и непаран степен непарног броја ће бити непаран, па је збир $p^{2011} + p^{2013}$ збир два непарна броја, а то је паран број. Па пошто је паран он је и сложен, што је и требало показати. ∎

4. Ако су p и $7p - 1$ прости бројеви онда је $7p + 1$ сложен број. Доказати.

   Решење. Нека је $p = 2$, тада је $7p - 1 = 7 \cdot 2 - 1 = 13$ такође прост број. А број $7p + 1 = 7 \cdot 2 + 1 = 15$ је сложен, што је и требало показати. Нека је сада p прост број већи или једнак 3, он је онда и непаран па је број $7p - 1$ паран. Овде завршавамо анализу проблема јер смо утврдили да тврђење важи за $p = 2$.∎

5. Постоји ли прост број p тако да и бројеви $3p + 1$ и $5p + 1$ буду прости?

   Решење. Постоји. То је број $p = 2$, јер су тада $3 \cdot 2 + 1 = 7$ и $5 \cdot 2 + 1 = 11$ прости. Више од овог не би било могуће јер би за било који други прост број $p \geq 3$, због његове непарности, бројеви $3p + 1$ и $5p + 1$ били парни па тиме и сложени. ∎

6. Доказати да остатак при дељењу простог броја са бројем 30 не може бити сложен број.

   Решење. Ако би остатак при дељењу простог броја p са бројем 30 био, на пример, 14 тада би било

$$p = 30 \cdot q + 14 = 2(15 \cdot q + 7)$$

па би p био дељив са 2, што је супротно претпоставци да је прост. На сличан начин би елиминисали све могућности да остатак буде сложен број и добили да важи тврђење задатка да тај остатак мора бити прост. ■

7. Одредити све просте бројеве p за које је и број $3^p + p^3$ прост.

Решење. За $p = 2$ је и $3^2 + 2^3 = 17$ прост, а за друге просте бројеве p, који су уз то и непарни, збир $3^p + p^3$ је збир два непарна броја, па је он паран, а тиме и сложен. Дакле, број $3^p + p^3$ је прост једино за $p = 2$. ■

8. Одредити све просте бројеве p такве да је $\frac{7}{6} > \frac{5}{p} > \frac{2}{5}$.

Решење. Из датог односа међу разломцима $\frac{7}{6} > \frac{5}{p} > \frac{2}{5}$ следи да је и

$$\frac{5}{2} > \frac{p}{5} > \frac{6}{7}$$

А сада, да би олакшали посао приликом поређења, проширимо дате разломке да их доведемо на исте имениоце. Закључујемо да је одговарајући исти именилац 70. Па ћемо имати:

$$\frac{175}{70} > \frac{14p}{70} > \frac{60}{70}$$

Односно, $175 > 14p > 60$. Одавде је: $\frac{175}{14} > p > \frac{60}{14}$. Па, једноставно добијамо да је $p \in \{5, 7, 11\}$. ■

9. Доказати да ако је број $p > 2$ прост, онда је број $p^{2011} + (2p)^{2012} + 2013$ сложен.

Решење. Број p је по претпоставци прост број већи од 2, па је тиме и непаран. У збиру $p^{2011} + (2p)^{2012} + 2013$ први сабирак је непаран, као непаран степен непарног броја. Други сабирак је паран број, јер је $2p$ паран број, а трећи сабирак је непаран. Збир два непарна и једног парног броја је паран број, па је овај збир паран број, а тиме и сложен. ■

10. Доказати да број $2^{10} + 3^{12}$ није прост.

Решење. Можемо извршити следећу трансформацију у запису:

$$2^{10} + 3^{12} = (2^5)^2 + (3^6)^2$$

и пробати да направимо квадрат бинома у коме ће нам 2^5 и 3^6 бити чланови. То ћемо постићи додавањем и одузимањем члана $2 \cdot 2^5 \cdot 3^6$. Па ћемо имати

$$2^{10} + 3^{12} = (2^5)^2 + (3^6)^2 = (2^5)^2 + 2 \cdot 2^5 \cdot 3^6 + (3^6)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 3^6 =$$

$$= (2^5 + 3^6)^2 - 2^6 3^6 = (2^5 + 3^6)^2 - 6^6 = (2^5 + 3^6)^2 - (6^3)^2 =$$

$$= (2^5 + 3^6 + 6^3)(2^5 + 3^6 - 6^3)$$

И ово последње нам потврђује да је број $2^{10} + 3^{12}$ сложен.■

11. Да ли постоји прост број који се може представити у облику збира кубова два природна броја?

Решење. Ако такав прост број p постоји, он би се могао представити као:

$$p = a^3 + b^3$$

где су a и b природни бројеви. Овде нам је неопходно познавање формуле за растав збира кубова: $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ Па кад њу искористимо, имали би да је:

$$p = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

Пошто прост број нема других чинилаца сем 1 и самога себе, и због чињенице да је $a + b > 1$, имаћемо да је

$$a^2 - ab + b^2 = 1$$

Решимо ову једначину у скупу природних бројева.
Она је еквивалентна са: $2a^2 - 2ab + 2b^2 = 2$. Односно, $a^2 + b^2 + (a - b)^2 = 2$. Одавде добијамо да је једино решење, за нас интересантно, $a = 1$ и $b = 1$, јер је услов да буду природни бројеви (Када би тражили целобројна решења, имали би и парове (1,0) и (0,1)). Па из овога добијамо да постоји прост број $p = 2$ за природне бројеве $a = 1$ и $b = 1$, такав да је $p = 2 = 1^3 + 1^3$. Друге могућности не постоје.■

12. Да ли је број $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ прост или сложен?

Решење. Због могућности да се израз $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ запише као производ

$$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n(1 + 3 + 3^2) = 3^n \cdot 13$$

једноставно закључујемо да је то сложен број.■

13. Сваки прост број већи од 3 је облика $6k+1$ или $6k+5$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Доказати.

Решење. На пример, за $k = 1$ је $6 \cdot 1 + 1 = 7$ и $6 \cdot 1 + 5 = 11$. Ова два броја су проста, евидентно већа од 3, и представили смо их на дате начине. Проверимо да ли су то једине могућности за представљање простих бројева већих од 3. Све природне бројеве можемо представити на један од следећих шест начина (за $k \in \mathbb{N}_0$):

$$6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5,\ 6k$$

Како су бројеви облика $6k+2$ дељиви са 2, то су они сложени. Бројеви облика $6k+3$ су дељиви са 3 па су и они сложени. Исти закључци да су сложени, се изводе и за бројеве облика $6k+4$ и $6k$ јер су и једни и други парни. Заиста, остају само бројеви облика $6k+1$ и $6k+5$, међу којима су сви прости бројеви. Наравно, имајмо у виду да нису сви овакви бројеви прости, већ да су сви прости бројеви овакви.■

14. Показати да постоји бесконачно много простих бројева.

Решење. Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и да се они могу поређати у низ

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

По томе би сви остали природни бројеви били сложени, па је и број

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

сложен. Али како је сложен он мора бити дељив неким од простих бројева, но то није могуће јер са којим год од наведених да се подели он даје остатак 1. Па смо овим конструисали још један прост број, и тако претходни поступак можемо понављати до бесконачности. Па скуп простих бројева није коначан, већ бесконачан. ■

15. За било који природан број n постоји n узастопних сложених природних бројева. Доказати.

Решење. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Следећеи низ садржи n узастопних природних бројева, и сви чланови су му сложени бројеви:

$$(n+1)n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2$$

$$(n+1)n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3$$

$$\vdots$$

$$(n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1+n$$
$$(n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1+(n+1)$$

конструкцијом оваквог низа узастопних природних бројева показано је да важи тврђење задатка. ■