ГЕОМЕТРИЈА, VIII разред - Задаци са ранијих математичких такмичења у Србији

Овај материјал са 50 геометријских задатака који су били на ранијим такмичењима у Србији, намењен је ученицима осмог разред основне школе, који се припремају за учешће на математичким такмичењима. Поред сваког задатка назначено је и такмичење на коме је он био постављен. Задаци су подељени у четири области: *Равне фигуре*, *Сличност*, *Тачка, права и раван* и *Полиедри*.

1 Равне фигуре

1. У круг полупречника $r = 12$ *cm* уписан је једнакокраки троугао, чији је угао при врху $30°$. Одредити обим и површину датог једнакокраког троугла. *(Општинско такмичење 1987.)*

2. Из дате тачке M, ван датог круга $K(O, r)$ конструисана је сечица s која кружну линију сече у тачкама A и B. Израчунати обим и површину датог круга ако је $MA = 16$ *cm*, $MB = 9$ *cm* и $MO = 13$ *cm*. *(Окружно такмичење 1996.)*

3. Дат је квадрат $ABCD$ странице a. Конструисан је лук $\widehat{AC}$ са центром B и лук $\widehat{AC}$ са центром D. Израчунати површину фигуре између два лука $\widehat{AC}$ у функцији од странице a. *(Школско такмичење 1997.)*

4. У кругу је уочена произвољна тачка M. Кроз тачку M је конструисана тетива PQ која са пречником који садржи тачку M заклапа угао од $45°$. Доказати да је вредност израза $MP^2 + MQ^2$ константа која не зависи од избора тачке M. *(Републичко такмичење 1997.)*

5. У троуглу $\triangle ABC$ је $\angle ACB = 60°$. Ако су AK и BM висине и C_1 средиште странице AB, тада је троугао $\triangle KMC_1$ једнакостраничан. Доказати. *(Општинско такмичење 1998.)*

6. У троуглу $\triangle ABC$ дате су висине BD и CE. Доказати да је $\angle ACE + \angle CBD = \angle ADE$. *(Републичко такмичење 1987.)*

7. На страницама AB и CD ромба $ABCD$ дате су тачке M и N, тако да је $AM : AB = CN : CD = 1 : 3$. Права MN сече продужетке страница AD и BC у тачкама P и Q. Доказати да пресек дијагонала ромба лежи на правој MN и да је $MP = MN = NQ$. *(Окружно такмичење 1990.)*

8. У унутрашњој области квадрата $ABCD$ дата је тачка M, тако да је угао $\angle AMB$ прав, а $BM = 9$ *cm*. Права BM пресеца дуж CD у тачки K тако да је $CK : DK = 3 : 1$. Израчунати површину квадрата. *(Школско такмичење 1998.)*

9. У троуглу $\triangle ABC$ мерни бројеви свих страница су природни бројеви, а најкраћа страница је 2 *cm*. Израчунати површину троугла $\triangle ABC$, ако је $h_c = h_a + h_b$. *(Општинско такмичење 1998.)*

10. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ тако да је $AB + AD = 10$ *cm*, $BC = CD$ и $\angle BCD = \angle BAD = 90°$. Израчунати површину датог четвороугла. *(Окружно такмичење 1998.)*

11. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Дијагонале AC и BD секу се у тачки O, а подножје нормале из тачке B на дијагоналу AC је тачка M, при чему је $BM = 2k \cdot BO$, где је k реалан број. Ако је површина тог четвороугла P, онда је $P = k \cdot AC \cdot BD$. Доказати. *(Републичко такмичење 1998.)*

12. Квадрат је подељен на пет дисјунктних правоугаоника једнаких површина тако да темена квадрата припадају различитим правоугаоницима, а пети правоугаоник нема заједничких тачака са страницама квадрата. Доказати да је тај пети правоугаоник квадрат. *(Савезно такмичење 1998.)*

13. Једнакокрако-правоугли троугао поделити са четири праве на три подударна квадрата и три подударна троугла. *(Општинско такмичење 2002.)*

14. Квадрат је са девет правих паралелних једној и девет правих паралелних другој страни, подељен на 100 правоугаоника од којих су тачно 9 квадрати. Доказати да су од тих девет квадрата бар два подударна. *(Републичко такмичење 2002.)*

15. M и K су тачке на страницама AB и CD редом, паралелограма $ABCD$, такве да је $AM = CK$ а P је произвољна тачка на страници AD. Нека је $\{E\} = MK \cap PB$ и $\{F\} = MK \cap PC$. Доказати да је:

$$\text{(a) } P_{\triangle EPF} = P_{\triangle BME} + P_{\triangle CFK}, \text{ (б) } P_{BCFE} = P_{APEM} + P_{PDKF}.$$

(Окружно такмичење 2004.)

16. Може ли се и како једнакостранични троугао странице 30 cm прекрити дисјунктним једнакокраким трапезима чије су странице 2 cm, 1 cm, 1 cm и 1 cm? *(Републичко такмичење 2000.)*

17. Дужине страница троугла су три узастопна природна броја, који нису мањи од 3. Доказати да висина троугла која одговара средњој по величини страници, дели ту страницу на делове чија је разлика 4. *(Савезно такмичење 1985.)*

2 Сличност

1. Конструиши троугао ABC, $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $\angle BAC = 30°$. На страници BC конструиши тачку M тако да је $BM : MC = AB : AC$. *(Школско такмичење 2012.)*

2. У правоугли троугао чије су катете 15 cm и 20 cm уписан је квадрат тако да се два његова темена налазе на хипотенузи, а свако од преостала два на по једној од катета. Доказати да је површина тог квадрата већа од 64 cm^2. *(Школско такмичење 1995.)*

3. Дат је правоугли троугао $\triangle ABC$ чије су катете 15 cm и 20 cm. У дати троугао уписан је круг, а у тај круг је уписан троугао $\triangle A'B'C'$ сличан датом. Колики су обим и површина добијеног уписаног троугла $\triangle A'B'C'$? *(Општинско такмичење 1995.)*

4. У дати троугао $\triangle ABC$ чија је основица $AB = c = 60$ cm и висина CC' која одговара основици, $h = 30$ cm уписан је правоугаоник $MNPQ$ чија је једна страница два пута већа од друге. Колика је површина тог правоугаоника, ако тачке M и N леже на основици AB датог троугла? *(Општинско такмичење 1997.)*

5. Ако су a и b дужине основица трапеза, одредити дужину дужи паралелне основицама, која дели трапез на два дела једнаких површина. *(Општинско такмичење 2001.)*

6. Из тачке A која је 120 m удаљена од подножија вертикалног торња BC, врх торња C се види под углом α. Из тачке D, која је за 90 m ближа подножју торња B, врх торња се види под углом $90° - \alpha$. Колика је висина торња? *(Окружно такмичење 2001.)*

3 Тачка, права, раван

1. Дато је 10 тачака. Колико је највише правих, а колико равни одређено датим тачкама? *(Школско такмичење 1996.)*

2. У равни α дата је права p и на њој пет тачака A, B, C, D и E. Ван праве p, а у равни α дато је још четири тачке Q, R, S и T. Колико је најмање, а колико највише правих одређено са ових девет тачака? *(Школско такмичење 1997.)*

3. Тачка A је од равни α удаљена 8 cm, а тачка B је од равни α удаљена 3 cm. Колико је растојање између тачака A и B, ако је нормална пројекција дужи AB на раван α дуж $A'B'$ једнака 12 cm? Колико има решења? *(Општинско такмичење 1997.)*

4. Дате су три дужи које се секу тако да им се средишта поклапају (притом ниједна од дужи не садржи неку другу). Колико највише, а колико најмање правих је одређено крајевима тих дужи? *(Општинско такмичење 2003.)*

5. Колико равни одређују темена коцке? *(Општинско такмичење 2010.)*

6. На свакој страници квадрата дате су по три тачке тако да ниједна од њих није теме квадрата. Колико је троуглова одређено овим тачкама? *(Општинско такмичење 2007.)*

7. Темена датог троугла $\triangle ABC$ налазе се са исте стране равни α и удаљена су од ње за 24 cm, 30 cm и 39 cm, редом. Одредити колико је од равни α удаљено тежиште T троугла $\triangle ABC$. *(Републичко такмичење 1996.)*

8. У равни је дат конвексан четвороугао и унутар њега 1996 тачака, тако да никоје три од њих не леже на једној правој. Произвољним редоследом спајамо по две тачке дужима које се не пресецају међусобно. Овај поступак продужавамо све док бар један пар тачака који се може спојити помоћу дужи која не пресеца ниједну од претходно повучених дужи. Колико смо непресецајућих дужи повукли? *(Савезно такмичење 1998.)*

4 Полиедри

1. Мерни бројеви ивица квадра су три узастопна природна броја, а један од дијагоналних пресека кавдра је квадрат. Колика је површина, а колика запремина тог квадра? *(Школско такмичење 1996.)*

2. У правилној шестостраној пирамиди основна ивица једнака је висини пирамиде. Израчунај нормално растојање подножја висине пирамиде од, од бочне стране пирамиде, ако је основна ивица пирамиде $a = \sqrt{21}$ cm. (*Окружно такмичење 1997.)*

3. Једно теме коцке удаљено је од дијагонале коцке 7 cm. Израчунати површину и запремину коцке. (*Општинско такмичење 1998.)*

4. Дужине странца основе квадра су 6 cm и 8 cm, а дијагонала квадра заклапа са основом угао од $45°$. Одредити површину и запремину квадра. (*Општинско такмичење 1999.)*

5. Коцка је исечена известан број пута паралелно једној страни. Укупна површина добијених делова је 2002 пута већа од површине полазне коцке. Колико пута је коцка расечена? *(Општинско такмичење 2002.)*

6. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Дуж која спаја центар O основе $ABCD$ са теменом A_1 сече дијагоналу коцке AC_1 у тачки P. Ако је дужина одсечка $OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ колика је површина коцке? *(Школско такмичење 2003.)*

7. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Колико пута је запремина коцке већа од заједничког дела тетраедара ACB_1D_1 и BDA_1C_1? *(Савезно такмичење 2002.)*

8. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице дужине a. Ако су E, F, G, H, I, J средишта ивица AB, BC, CC_1, C_1D_1 ,D_1A_1, A_1A наћи површину пирамиде са врхом B_1 и основом $EFGHIJ$. *(Окружно такмичење 2002.)*

9. Нека је $OABC$ пирамида чије су ивице OA, OB, OC међусобно нормалне. Доказати да је:

$$(P_{\triangle ABC})^2 = (P_{\triangle OAB})^2 + (P_{\triangle OBC})^2 + (P_{\triangle OCA})^2$$

   (Републичко такмичење 2002.)

10. Ако се дужина квадра повећа за 25%, ширина за своју трећину и висина смањи за 10%, како се мења запремина? *(Школско такмичење 2002.)*

11. Правилна тространа пирамида $ABCS$, основне ивице a и висине H, пресечена је са равни која садржи средишта основних ивица AB и AC и паралелна је са бочном ивицом AS. Израчунати обим и површину пресека. *(Републичко такмичење 2001.)*

12. Дата је тространа једнакоивична пирамида $SABC$. Нека је SS' висина пирамиде, а M средиште висине SS'. Доказати да је $\angle AMB = 90°$. (*Окружно такмичење 2001.)*

13. Основна ивица правилне тростране пирамиде је дужине x, а бочна страна заклапа са равни основе угао од $60°$. Одредити x ако је мерни број површине пирамиде једнак мерном броју њене запремине. (*Окружно такмичење 2000.)*

14. Израчунати површину и запремину правилне четворостране пирамиде чија је висина 17 cm, а површина дијагоналног пресека 204 cm^2. (*Окружно такмичење 1999.)*

15. Тространа пирамида има пет страница дижине a и једну дужине b. Израчунати запремину пирамиде. *(Савезно такмичење 1997.)*

16. Квадрат странице a представља мрежу тростране пирамице. Израчунати запремину те пирамиде у функцији од a. *(Републичко такмичење 1997.)*

17. Основа четворостране пирамиде је једнакокраки трапез чије су основице $a = 5$ cm и $b = 3$ cm а краци су $c = d = 7$ cm. Израчунати запремину дате пирамиде ако висина пирамиде пада у пресек дијагонала трапеза, а већа бочна ивица је 13 cm. (*Окружно такмичење 1996.)*

18. Правилна четворострана пирамида $ABCDS$ основне ивице a и висине H пресечена је са равни α. Раван α сече основне ивице AB, AD и бочну ивицу AS редом у тачкама M, N, P тако да је

$$AM : MB = 1 : 1,\ AN : ND = 2 : 2,\ AP : PS = 3 : 1$$

   Израчунати размеру запремина делова пирамиде које одређује раван α. (*Окружно такмичење 2011.)*

19. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од $30°$ при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде. (*Окружно такмичење 2007.)*