МАТЕМАТИЧКИ ФОРУМ

Геометријски задаци - Пети разред

Овај материјал, са задацима из области основних геометријских појмова, намењен је ученицима петог разред који се припремају за учешће на такмичењима. Задаци су били на ранијим такмичењима у Србији, а поред сваког од њих назначено је и такмичење на коме је он био постављен.

1 Задаци

1. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ су комплементни. Одреди углове α, β и γ, ако је угао α пет пута већи од угла:
   а) β; б) γ. *(Школско такмичење 2012.)*
2. Тачке A, B и C су на једној, а D и E на другој од две паралелне праве. Наброј све дужи и све троуглове које одређују тих пет тачака. *(Школско такмичење 2012.)*
3. Који угао је суплементан са својом осмином? *(Школско такмичење 2011.)*
4. Угао α је за 32° већи од своје трећине. Одреди угао комплементан углу α. *(Школско такмичење 2009.)*
5. Углови α и β су комплементни. Одреди углове α и β ако је њихова разлика једнака трећини већег угла. *(Школско такмичење 2008.)*
6. Нацртај кружне линије $k_1(O_1,\ 2\ cm)$ и $k_2(O_2,\ 3\ cm)$ ако је $O_1O_2 = 6\ cm$. Одреди тачке $A \in k_1$ и $B \in k_2$ тако да је дуж AB
   (а) најкраћа; (б) најдужа.
   Колика је тада дужина дужи AB? *(Школско такмичење 2004.)*
7. Израчунај меру угла који је за $2004'$ већи од њему комплементног угла. *(Школско такмичење 2004.)*
8. Дужине страница правоугаоника, мерене у центиметрима, изражавају се природним бројевима. Површина правоугаоника је $24\ cm^2$. Колико таквих неподударних правоугаоника постоји? *(Школско такмичење 2003.)*
9. Најкраће растојање тачке A од датог круга K је $3\ cm$, а растојање тачке A од центра круга је $5\ cm$. Колико је највеће растојање тачке A од датог круга K? *(Школско такмичење 1998.)*
10. Збир угла комплементног датом углу α и угла суплементног датом углу α једнак је четвоространом углу α. Колики је угао α? *(Школско такмичење 1997.)*
11. Запремина коцке је $1728\ cm^3$. Одредити њену површину. *(Школско такмичење 1996.)*
12. Колико најмање, а колико највише треба конструисати правих у равни, да би оне раван поделиле на 7 области? *(Школско такмичење 1996.)*

2 Решења

1. Услови задатка кажу да је $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $\beta + \gamma = 90^\circ$.

   (а) С обзиром да је $\alpha = 5 \cdot \beta$ имаћемо: $5 \cdot \beta + \beta = 6 \cdot \beta = 180^\circ$ и одатле је $\beta = 30^\circ$ и $\alpha = 150^\circ$. А због $\beta + \gamma = 90^\circ$ је $\gamma = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

   (б) С обзиром да је $\alpha = 5 \cdot \gamma$ имаћемо: $5 \cdot \gamma + \beta = 180^\circ$ и $\beta + \gamma = 90^\circ$. А одавде је $4 \cdot \gamma = 90^\circ$, односно $\gamma = 22^\circ 30'$. Лако се добија да је $\beta = 67^\circ 30'$ и $\alpha = 112^\circ 30'$.

2. Одређене су следеће дужи: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE и следећи троуглови:

   $$\triangle ABE,\ \triangle ABD,\ \triangle ACE,\ \triangle ACD,\ \triangle BCE,\ \triangle BCD,\ \triangle EDA,\ \triangle EDB,\ \triangle EDC$$

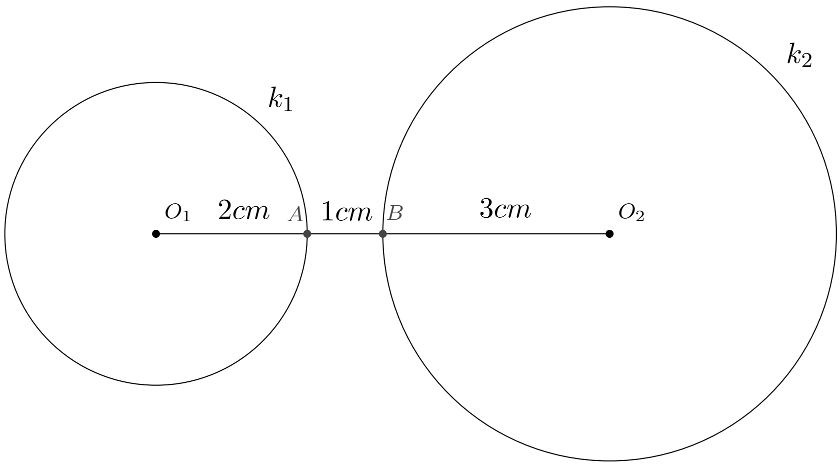
   Дакле, 10 дужи и 9 троуглова.

3. Обележимо непознати угао са α, а са β њему суплементан угао. Пошто је α суплементан са својом осмином то значи да је он од тог угла већи 8 пута, тј. $\alpha = 8 \cdot \beta$ и $\alpha + \beta = 180^\circ$. Одавде је $9 \cdot \beta = 180^\circ$, односно $\beta = 20^\circ$, а $\alpha = 160^\circ$.

4. Пошто је угао α већи од своје трећина за 32°, његове две трећине су управо толико а једна његова трећина је 16° и он је $\alpha = 48^\circ$. Па је њему комплементан угао $\beta = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$.

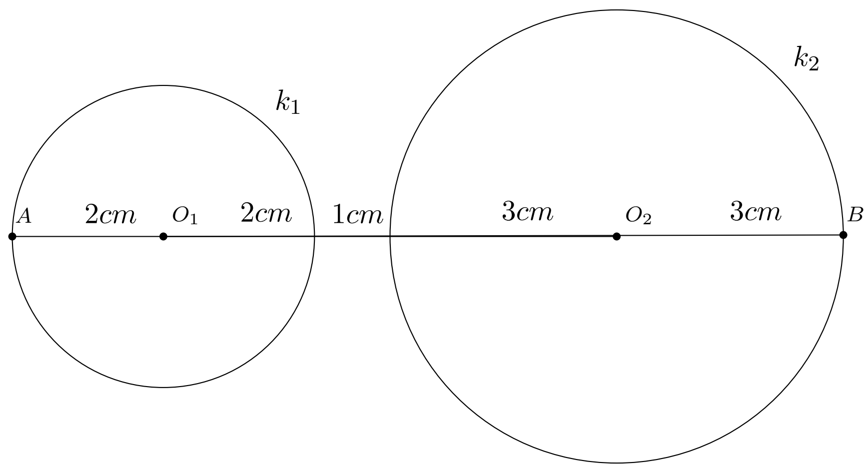
5. Нека је, на пример, $\alpha > \beta$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$. Пошто је $\alpha - \beta$ једнако трећини од α, то је угао β једнак са $\frac{2}{3}$ од α, односно $\frac{5}{3}\alpha = 90^\circ$. Одавде је $\alpha = 54^\circ$ и $\beta = 36^\circ$.

6. Ово је један од карактеристичних задатака на ову тему, и слични се често појављују. На следећим сликама приказана су одговарајућа решења за тражене тачке $A \in k_1$ и $B \in k_2$. Ове тачке се траже на правој која је одређена центрима O_1 и O_2.
   (а)



У овом случају је $AB = 1\ cm$.

(б)

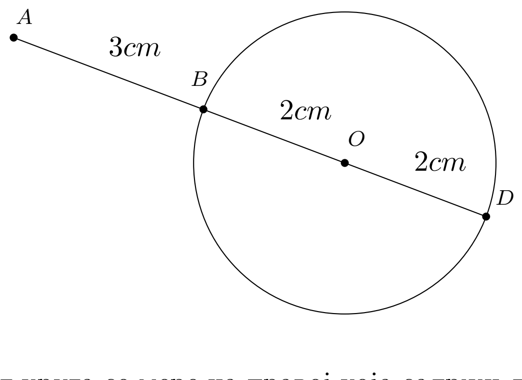


У овом случају је $AB = 11\ cm$.

7. Нека је угао α већи од свог комплемента за $2004'$, то ћемо записати $\alpha + \overbrace{\alpha - 2004'} = 90^\circ$, где је $\alpha - 2004'$ његов комплемент. Пошто је $2004' = 33^\circ 24'$ одавде је $2\alpha = 90^\circ + 33^\circ 24' = 123^\circ 24'$ односно $\alpha = 61^\circ 42'$.

8. Површина правоугаоника израчунава се по обрасцу $P = a \cdot b$, где су a и b дужине његових страница. Идеја је представити број 24 као производ природних бројева, а који ће бити дужине страница. Лако долазимо до закључка да таквих правоугаоника има четири. То су правоугаоници чије су дужине страница 1 cm и 24 cm, 2 cm и 12 cm, 3 cm и 8 cm, 4 cm и 6 cm.

9. Посматрајмо следећу слику.



Одговарајућа растојања од круга се мере на правој која садржи дату тачку и центар круга. Па једноставно видимо да је то тражено највеће одстојање једнако дужини дужи $AD = 7\ cm$.

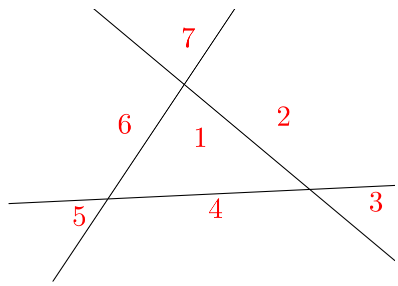
10. Нека је угао β комплементан углу α и нека је угао γ суплементан углу α. То значи да је $\alpha+\beta=90°$ и $\alpha+\gamma=180°$. А ми знамо да је, по условима задатка, $\beta+\gamma=4\cdot\alpha$, то јест

$$90° - \alpha + 180° - \alpha = 4\cdot\alpha$$

Одавде је $270° = 6\cdot\alpha$ и $\alpha = 45°$.

11. Запремина коцке, ивице a, једнака $V = a^3$, а нас занима колика је ивица коцке којој је запремина 1728 cm^3. Раставимо број 1728 на просте чиниоце, и добијамо $1728 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3$. Одавде је $1728 = (2\cdot2\cdot3)^3 = 12^3$. Површина ове коцке ће бити $P = 6\cdot12^2 = 6\cdot144 = 864$.

12. На сликама које следе приказани су примери одговарајућих решења. Било које три праве које, међу којима нема паралелних одређују 7 области у равни, и то је тражени најмањи број правих.



За највећи могући број правих које одређују 7 области у равни дошли смо до њих тачно шест, и то узимајући паралелне праве.