Вељко Ћировић

Неки занимљиви задаци са математичких такмичења у Естонији

Задаци су из почетне фазе Естонског националног такмичења, и намењени су ученицима до 10 разреда. Дат је избор од 12 занимљивих задатака.

ЗАДАЦИ

1. Ненегативни цели бројеви a, b и c задовољавају једнакост $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Доказати да међу ова три броја постоје два која имају заједнички делилац већи од 1. (2013.)

2. Природни бројеви од 1 до 200 написани су на табли. Јулија треба да напише знакове плус или минус испред сваког датог броја тако да за сваки број $n \leq 100$, тај број и један од његових садржалаца имају различите знакове. Којим бројевима треба дописати знак минус тако да би се добила највећа могућа вредност израза? (2013.)

3. Пера је у једној збирци наишао на тврдњу: За сваки реалан број x и природан број n важи $(1+x)^n \geq 2^n x$. Пошто му се учинило да је ова тврдња нетачна он је покушао да је и оповргне. До каквог закључка је могао доћи? (2013.)

4. Одредити све четвороцифрене природне бројеве такве да када им се избрише једна цифра преостали троцифрени број је делилац полазног броја. (2012.)

5. Одредити најмањи број боја потребних за бојење свих тачака са целобројним координатама у равни, тако да не постоје две тачке које су удаљене за тачно 5 јединичних одстојања, а да су обојене истом бојом. (2012.)

6. Нека је n природан број и $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ реални бројеви из интервала $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ако се изостави било који од ових бројева збир преосталих $2n-1$ бројева је увек цео број. Доказати да је $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n}$. (2012.)

7. Да ли је могуће да обим троугла чији су мерни бројеви дужина страница природни, буде дељив са двоструком вредношћу дужине најдуже странице? (2012.)

8. Одредити све парове (a, b) реалних бројева таквих да је $a+b=1$, који задовољавају једнакост $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^4$. (2011.)

9. Нека је $ABCD$ паралелограм.
(а) Доказати да ако се центар уписаног круга троугла ABC налази на дијагонали BD, онда је паралелограм $ABCD$ ромб.
(б) Да ли је паралелограм $ABCD$ ромб кад год се центар описаног круга троугла ABC налази на дијагонали BD? (2011.)

10. Одреди све природне бројеве n за које је $1 + 2^2 + 3^2 + 4^n$ потпун квадрат неког природног броја. (2010.)

11. У кухињи се налазе три кутије са бомбонама, и свака садржи исти број бомбона. Сваки пут када Јоца уђе у кухињу он узима или 3 бомбоне из једне кутије или по једну бомбону из сваке кутије. Доказати да без обзира колико Јоца узима бомбона из које кутије, он увек задржава могућност да комплетно испразни све кутије са бомбонама. (2010.)

12. На финалном турниру једног фудбалског шампионата тимови су подељени у групе од по 4. Сваки тим игра по једну утакмицу са сваким другим тимом из друге. Победа доноси 3 бода, нерешен резултат по 1 бод обема екипама и пораз доноси 0 бодова. Из сваке групе у другу фазу пролазе по два тима која имају највише бодова, или у случају истог броја бодова, бољу гол разлику, у групи.
(а) Са колико најмање бодова се може проћи у други круг?
(б) Колико највише бодова може освојити тим који није прошао у наредну фазу? (2005.)

Литература

1. www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/html/index.php