Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
05.04.2014.
V разред

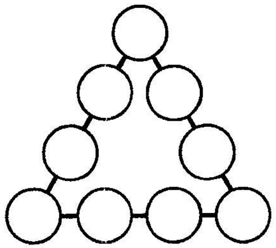
1. Помоћу цифара 0, 1, 3, 5, 7 написани су сви могући четвороцифрени бројеви са различитим цифрама. Колико међу њима има дељивих са 5?

2. Одреди све нескративе разломке $\frac{a}{b}, a \in N, b \in N, \frac{a}{b} < 1$, тако да је збир бројиоца и имениоца 37, а при томе разломцима одговара коначан децимални запис.

3. Комад сира има облик коцке. На колико се једнаких делова тај сир може поделити са три резања ножем ако је свако резање паралелно некој страни коцке?

4. Ана, Биља и Цеца су записале три проста броја a, b и c. Испоставило се да је $ab + bc + ca = 2016$. Коју вредност има највећи од бројева a, b и c.

5. Прецртај два пута дату слику на папир који ћеш предати. На свакој од слика, у кружиће упиши бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (сваки тачно једанпут) тако да су збирови бројева у кружићима на све три странице троугла једнаки. Како треба уписати бројеве да збир буде највећи могући, а како да буде најмањи могући? Прикажи на сликама и образложи.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Решење

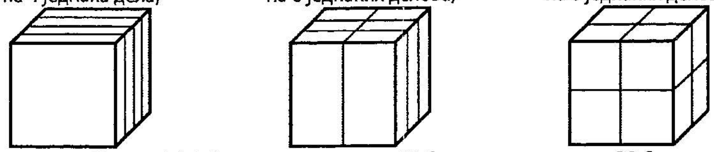
Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Последња цифра тражених бројева може бити 0 или 5. Ако је последња цифра 0, за јединице хиљада имамо 4 могуће цифре, за стотине 3 могуће цифре и за десетице 2 цифре. Укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ броја (**10 бодова**). Ако је последња цифра 5, за јединице хиљада имамо 3 могуће цифре (јер 0 не може бити на месту јединица хиљада), за стотине 3 могуће цифре и за десетице 2 цифре. Укупно $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ бројева (**10 бодова**). Дакле, међу написаним бројевима има 42 броја дељива са 5.

2. (МЛ 48/4) Разломак $\frac{a}{b}, a \in N, b \in N$ је нескратив, има коначан децимални запис и мањи је од 1 ако су a и b узајамно прости, прости чиниоци броја b су двојке и петице и $a < b$ (**2 бода**). По услову задатка је $a + b = 37$, па следи $a = 5, b = 32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $a = 12, b = 25 = 5 \cdot 5$; $a = 17$, $b = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Остали случајеви не испуњавају услове. Тражени разломци су $\frac{5}{32}, \frac{12}{25}$ и $\frac{17}{20}$ (Сваки тачно наведени разломак **6 бодова**. Ако су уз то наведени и погрешни одговори, на пример $\frac{10}{27}$, за сваки такав одговор одузети 3 бода, с тим да укупан збир буде ненегативан.)

3. Постоје 3 начина резања:

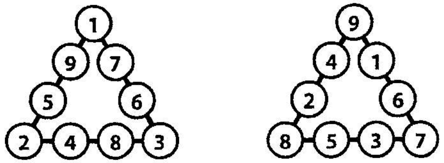
на 4 једнака дела; на 6 једнаких делова; на 8 једнаких делова.



(Једно решење (било које) **6 бодова**, два решења **13 бодова**, три решења **20 бодова**.)

4. Барем један од бројева мора бити паран јер ако су сви непарни и збир $ab + bc + ca$ је непаран. Нека је $a = 2$ (**5 бодова**). Тада је $2b + bc + 2c = 2016$. Како су $2b$ и $2c$ парни бројеви то мора и bc бити паран број, тј. један од бројева b или c мора бити паран. Нека је $b = 2$ (**10 бодова**). Тада је $4 + 4c = 2016$, одакле је $c = 503$. Како је број 503 прост, 503 је и тражено решење задатка (**5 бодова**).

5. Збир свих бројева које уписујемо у кругове је 45. Бројеви у круговима у теменима троугла се рачунају по два пута јер се налазе на две странице. Ако са a, b и c обележимо бројеве које уписујемо у кругове у теменима троугла, тада је збир бројева на једној страници $(45 + a + b + c) : 3$. Овај збир је најмањи када су бројеви a, b и c једнаки 1, 2 и 3 и једнак је 17 (**5 бодова**) (слика лево). Збир је највећи када су бројеви a, b и c једнаки 7, 8 и 9 и једнак је 23 (**5 бодова**) (слика десно).



(По **5 бодова** за сваки тачно попуњени троугао.)

Напомена: На сликама је по један од могућих распореда бројева. Максимално бодовати и сваки други тачан распоред бројева.