Вељко Ћировић

ГЕОМЕТРИЈА ТРОУГЛА И ЧЕТВОТРОУГЛА

Приказан су детаљна решења неких задатака са ранијих математичких такмичења одржаних у Србији или Хрватској.

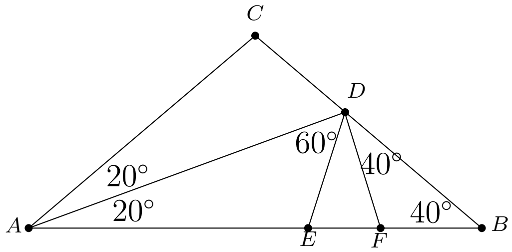
У наставку је дато 15 задатака, такође са ранијих такмичења, са кратким упутствима за решевање.

Верзија 2. (19. април 2014.)

1 Решени задаци

1. У једнакокраком троуглу $\triangle ABC$ је $\angle ABC = \angle BAC = 40°$. Симетрала угла BAC сече крак BC у тачки D. Доказати да је $AD + DC = AB$. (Савезно СИЦГ, 2004. g)

Решење. На страници AB датог троугла $\triangle ABC$ уочимо тачке E и F такве да је $\angle ADE = 60°$ и $\angle BDF = 40°$.

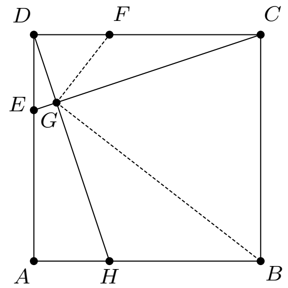


Једноставно се закључује да важи подударност: $\triangle ADC \cong \triangle ADE$.

Троуглови $\triangle ADF$, $\triangle EFD$ и $\triangle FBD$ су једнакокраки са основицама DF, EF и BD (редом). Одавде је $AF = AD$ и $CD = ED = FD = FB$, па важе и одговарајуће једнакости $AD + DC = AF + FB = AB$.

2. Дат је квадрат $ABCD$. Тачка E припада страници AD, тачка F припада страници DC, при чему је $DE = DF$. Ако је G подножје нормале из D на EC, доказати да је $\angle BGF = 90°$.

Решење. Нека је H такча на AB, у којој продужетак нормале DG сече AB. Из подударности $\triangle DAH \cong \triangle CDE$ и услова $ED = DF$, добијамо да је $AH = DE = DF$ јер је четвороугао $HBCF$ правоугаоник.

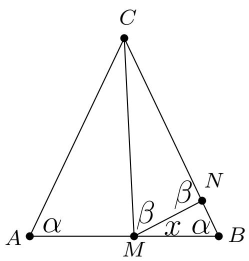


Дијагонала BF тог правоугаоника је пречник његове описане кружнице. Како је $\angle HGC = 90^\circ$, то тачка G припада тој кружници па одатле следи $\angle BGF = 90^\circ$.

(Напомена: Угао над пречником круга је прав.)

3. У једнакокраком троуглу ABC је $AB = AC$ и $\alpha > 30^\circ$. На основици BC изабрана је тачка M тако да је $\angle BAM = 30^\circ$, а на краку AC тачка N, тако да је $AM = AN$. Израчунати $\angle NMC$.

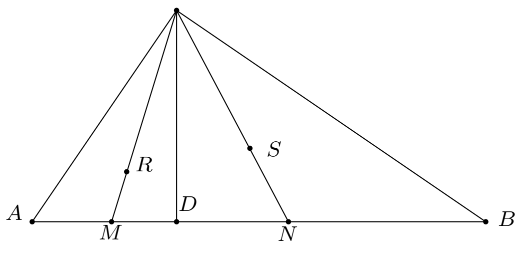
Решење. Обележимо са β једнаке углове $\angle AMN$ и $\angle ANM$, а тражени угао $\angle CMN$ са x.



Тада је $\beta = x + \alpha$ (као спољашњи угао троугла $\triangle ABM$). Сада је и $\beta + x = 30^\circ + \alpha$ (као спољашњи угао троугла ABM). Убацивањем β из прве у другу једнакост, добија се $x + \alpha + x = \alpha + 30^\circ$, а одавде је $x = 15^\circ$.

4. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом код темена C. Нека је тачка D подножије нормале из темена правог угла на страницу AB, а тачка R центар уписане кружнице у троугао ADC и тачка S центар уписане кружнице троугла BDC. Ако права CR сече хипотенузу AB у тачки M, а праву CS у тачки N, онда је $AC = AN$ и $BC = MB$. Доказати. (Хрватска, Државно 2000.)

Решење. Да би показали да су ове дужи међусобно једнаких дужина циљ можемо усмерити на показивање да су троуглови ANC и BCM једнакокраки.

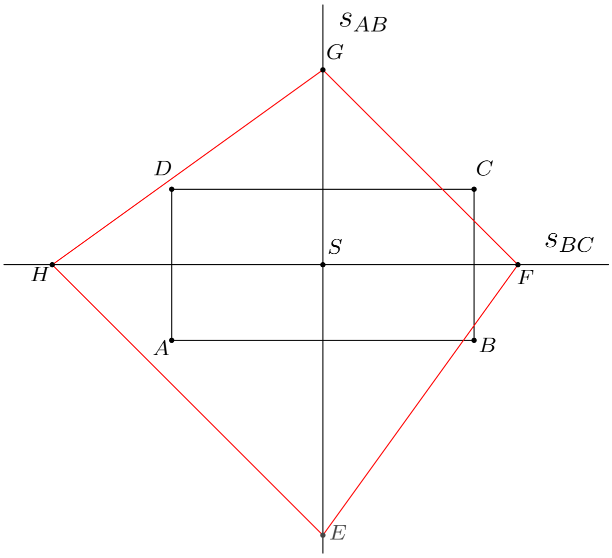


На основу датих података важи: $\angle ABC = \angle ACD = \beta$ и $\angle BAC = \angle BCD = \alpha$. Права одређена са CN је симетрала угла $\angle BCD$, а права одређена са CM је симетрала угла $\angle ACD$, па је: $\angle BCN = \angle NCD = \dfrac{\alpha}{2}$ и $\angle ACM = \angle MCD = \dfrac{\beta}{2}$. Због особина спољашњег угла троугла важи и $\angle ANC = \beta + \dfrac{\alpha}{2}$, а с друге стране је и $\angle ACN = \beta + \dfrac{\alpha}{2}$. Одавде је троугао ACN једнакокрак, и важи $AC = AN$.

На сличан начин се показује и да је други троугао ($\triangle BCM$) једнакокрак, одакле ће следити и друга једнакост.

5. Дат је правоугаоник $ABCD$. На симетрали страница AB односно BC, налазе се тачке E и G, односно F и H, тако да је $ES = SH$ и $FS = SG$, при чему је тачка S пресек симетрала страница AB и BC. Доказати да је четвороугао $EFGH$ једнакокраки трапез.

Решење. Јасно је да су уочене симетрале страница међусобно нормалне и да се секу у тачки која је истовремено и пресек дијагонала овог правоугаоника.



На основу датих података закључујемо да су троуглови $\triangle ESH$ и $\triangle FGS$ једнакокрако правоугли, а троуглови $\triangle FSE$ и $\triangle GHS$ су правоугли.

Будући да је:

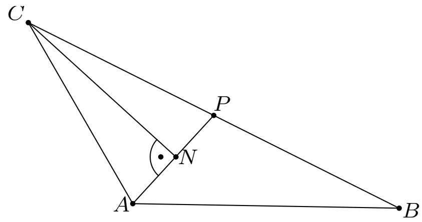
$$\angle HEF + \angle EFG = \angle HES + \angle SEF + \angle EFS + \angle SFG = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

закључујемо да је $HE \parallel FG$ и да је четвороугао $HEFG$ трапез.

Због правих углова ког заједничког темена S и једнакости одговарајућих страница које су дате у условима задатка, јасно је да имамо подударност: $\triangle EFS \cong \triangle HGS$, одакле је $EF = HG$. Па је уочени трапез једнакокрак, што је и требало показати.

6. Дат је троугао ABC код кога су дужине страница три узастопна природна броја. Нека је тачка P средиште странице BC, и нека је симетрала угла $\angle ACB$ нормална на дуж AP. Колике су дужине страница троугла ABC? (Хрватска, Државно 2006.)

Решење. Означимо са тачку пресека симетрале угла код темена C и дужи AP.



Правоугли троуглови ANC и PNC су подударни (једнака заједничка страница и углови налегли на њој - став УСУ). Па је одатле $AC = CP$. Али, пошто је тачка P средиште странице BC, то је страница BC дупло дужа од странице AC датог троугла.

Како су дужине страница овог троугла узастопни приридни бројеви (означимо их са $n, n+1, n+2$) разликоваћемо три случаја:

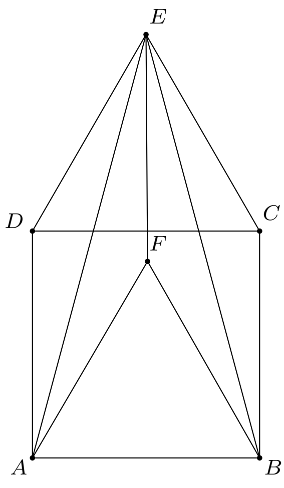
1° $n + 1 = 2n$, а одавде би дужине страница биле 1, 2, 3 што није могуће због неједнакости троугла;

2° $n + 2 = 2(n + 1)$, а одавде би било $n = 0$, што је такође немогуће;

3° $n + 2 = 2n$, и одавде се добија да би странице троугла биле 2, 3, и 4, што је решење овог задатка.

7. Дат је квадрат $ABCD$ и тачка E ван њега, таква да је троугао DCE једнакостраничан. Доказати да је полупречник описане кружнице троугла ABE једнак дужини странице датог квадрата.

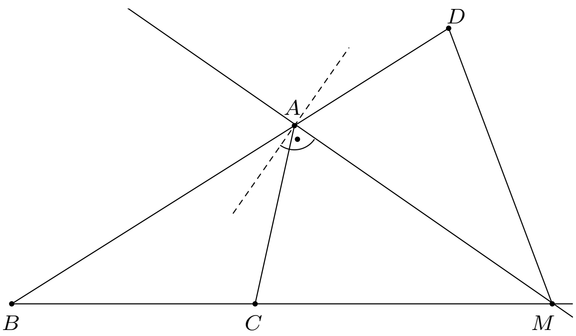
Решење.



Идеја: Доказати да је четвороугао $AFED$ паралелограм, односно ромб. Одатле ће следити да је $AF = BF = EF$, што је еквивалентно траженом закључку.

8. У троуглу ABC је $\angle BAC = 42^\circ$. Нормала у темену A на симетралу унутрашњег угла $\angle BAC$ сече праву BC у тачки M, тако да је $BM = AB + AC$, при чему тачка C лежи између B и M. Одредити величине остала два унутрашња угла троугла ABC. (Хрватска, Државно 1997.)

Решење. Права AM нормална на симетралу унутрашњег угла $\angle BAC$ је симетрала спољашњег угла код темена A. Уочимо на продужетку странице AB тачку D иза тачке A тако да је $AD = AC$. Због једнакости по две одговарајуће странице и угла између њих је $\triangle ACM \cong \triangle ADM$.



Па из ове подударности добијамо $\angle ACM = \angle ADM$ а због особина спољашњег угла троугла је $\angle ACM = \alpha + \beta$.

С обзиром да је $BD = BA + AD = BA + AC$ и због претпоставке $BM = AB + AC$ добијамо да је троугао BDM једнакокрак, $\angle BDM = \angle BMD = \alpha + \beta$.

Па у троуглу BMD важи $\beta + 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$. И одавде добијамо $\beta = 32^\circ$ и $\gamma = 106^\circ$.

2 Задаци за вежбу са кратким упутствима

1. Над страницом AB квадрата $ABCD$ конструисан је једнакостранични троугао $\triangle AMB$. Израчунати колики је угао $\measuredangle DMC$?

2. Дат је троугао $\triangle ABC$ и на страници BC тачка D између темена B и C тако да је $DC = 2BD$. Ако је $\measuredangle ABC = 45^\circ$ и $\measuredangle ADC = 60^\circ$ израчунати колики су углови $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ACB$.

3. Дат је правоугли троугао $\triangle ABC$ са правим углом код темена C. Изван троугла конструисани су квадрати $ANMB$ и $ACPQ$. Ако је тачка R средиште катете BC, а тачке S и T пресеци дијагонала квадрата $ABMN$ и $ACPQ$. Доказати да је троугао $\triangle SRT$ једнакокрак.

4. Кроз свако теме троугла $\triangle ABC$ конструисана је права паралелна са наспрамном страницом. Збир обима свих паралалограма добијених након конструкције ових правих је 2012 cm. Одредити обим троугла $\triangle ABC$.

5. Са исте стране праве a дате су тачке P и Q. Одредити тачку R која припада правој a за коју важи да је збир $PR + RQ$ најмањи.

6. На основицама AB и CD трапеза $ABCD$ $(AB > CD)$ дате су тачке E и F које су њихова средишта. Ако је познато да је $EF = \dfrac{AB - CD}{2}$ одредити збир углова на краћој основици.

7. У унутрашњости конвексног четвороугла $MNPQ$ дата је тачка R. Доказати да је збир $MR + NR + PR + QR$ најмањи ако је R пресек дијагонала овог четворугла.

8. У трапезу $ABCD$ дијагонале секу средњу линију у тачкама које је деле на три једнака дела. Ако је дужа основица $AB = 2012\ cm$ одредити колика је краћа основица CD.

9. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$, са правим углом код темена C, висина и тежишна дуж на хипотенузу деле прав угао на три једнака дела. Колики је угао $\measuredangle BAC$ овог троугла?

10. Дат је четвороугао $ABCD$ обима $28\ cm$ за кога се зна да је централно симетричан и да му је једна од страница $7\ cm$. Доказати да је овај четвороугао ромб.

11. Ако су a и b катете, c хипотенуза, а r полупречник уписане кружнице правоуглог троугла, доказати да важи $a + b = c + 2r$.

12. Нека је дат ромб $ABCD$ чија је краћа дијагонала једнака страници, и тачке E и F на његовим страницама AB и BC, тако да је $EB + BF = AB$, и нека је тачка G симетрична тачки E у односу на AD. Доказати да је $FG \parallel CD$.

13. Унутрашњи углови троугла односе се као $13 : 16 : 11$. Одредити угао који заклапају симетрала средњег по величини угла овог троугла и висина из темена тог угла на наспрамну страницу троугла.

14. Нормала из темена C правоугаоника $ABCD$ на дијагоналу BD дели ту дијагоналу у односу $1 : 3$. Одредити углове између дијагонала овог правоугаоника.

15. У троуглу $\triangle ABC$ угао α је за $20°12'$ већи од угла β. Ако је тачка D на страници BC, између темена B и C тако да је $AC = CD$ израчунати колики је угао $\measuredangle BAD$.

Сугестије и скице решења

1. У овом задатку треба анализирати два случаја. Први када је тачка M унутар квадрата, а други када је ван њега. Тражени углови су $150°$ и $30°$.

2. Повући нормалу из темена C на AD и затим анализирати добијене троуглове. Решења су $\measuredangle BAC = 60°$ и $\measuredangle ACB = 75°$.

3. Поред тачке R као средишта странице BC, уочити и средишта остале две странице: L - средиште странице CA и K - средиште странице AB. Сада доказати да су троуглови $\triangle RTL$ и $\triangle RKS$ подударни, а одатле ће следити једнакост дужи SR и RT.

4. Уочити 3 паралелограма. Тражени обим је $503\ cm$.

5. Одредити тачку P' симетричну са P у односу на a. Пресечна тачка $P'Q \cap a = \{R\}$ је тражено решење. Образложити.

6. Из средишта F основице CD поставити пареллеле са краковима и уочити пресечне тачке тих паралела са већом основицом. На тај начин се дати трапез подели на два паралелограма и два једнакокрака троугла. Одатле се, једноставним извођењем, да показати да је збир углова на краћој основици $270°$.

7. Нека је R пресек дијагонала овог четворугла. Узети било коју тачку S различиту од R у унутрашњости четвороугла, па показати да је збир $MS + NS + PS + QS$ већи од $MR + NR + PR + QR$ за било које такво S. За ово показивање користити важне особине односа страница у троуглу.

8. Крађа основица је $CD = 1006\ cm$.

9. Како висина и тежишна дуж на хипотенузу деле прав угао на три једнака дела, то су ти делови по $30°$. Затим уочити неколико карактеристичних правоуглих троуглова (који су половина једнакострачничог са угловима од $30°$, $60°$ и $90°$) и одатле закључити да је тражени угао $\measuredangle BAC = 30°$ (или $\measuredangle BAC = 60°$, што зависи од обележавања, јер је и сам троугао $\triangle ABC$ половина једнакостраничног).

10. Четвороугао $ABCD$ је паралелограм због услова да је централно симетричан. А како му је једна страница $7\ cm$ то је и њој наспрамна толика. Међутим и друге две су једнаке па су због обима од $28\ cm$ и оне по $7\ cm$, па је овај паралелограм, заиста, ромб.

11. Важи $a = r + (a - r)$, $b = r + (b - r)$ (Приказати помоћном сликом и детаљно образложити). А одатле се сабирањем ова два израза и долази до траженог закључка.

12. Показати да је $ABFG$ једнакокраки трапез. Одатле ће једноставно следити и тражена паралелност.

13. Утврдити да су унутрашњи углови: $58°30'$, 72 и $49°30'$. Даље се усмерити на симетралу и висину из угла $58°30'$. Висина из темена тог угла на наспрамну страницу одређује правоугли троугао, па се из његовоих углова закључује о величини траженог угла.

14. Нека је n нормала из темена C на дијагоналу BD. Означимо са E одговарајући пресек: $n \cap BD = \{E\}$, а са O пресек дијагонала правоугаоника. Једноставним извођењем се добија да је $BE = EO$ и $OD = 2BE = 2EO = OC = OA$ а одавде и да је троугао $\triangle BCO$ једнакостраничан, а углови између дијагонала $60°$ и $120°$.

15. Посматрати једнакокраки троугао $\triangle ADC$ и применити правило за збир унутрашњих углова. Решење је $\measuredangle BAD = 10°6'$.