СЕДМИ РАЗРЕД, СПЕЦИЈАЛИЗОВАНО МАТЕМАТИЧКО ОДЕЉЕЊЕ ВАЉЕВСКЕ ГИМНАЗИЈЕ
$\sim\sim\sim$ РЕАЛНИ БРОЈЕВИ - ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ $\sim\sim\sim$

Вељко Ћировић, 16. октобар 2014.

1. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

Пр. 1. Да ли је број $\sqrt{0,444...}$ рационалан?

Решење. Представимо најпре број $0,444...$ у облику разломка (пошто је јасно да се то може учинити, јер има периодичан децимални запис). Нека је $x = 0,444....$ Помножимо ли обе стране са 10 биће $10x = 4,444....$ Одузмимо обема странама по $x = 0,444...$ и одатле је $9x = 4$, односно $x = \frac{4}{9}$. Па је $\sqrt{0,444...} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Дакле, рационалан је. $\square$

Пр. 2. Шта је веће: $7\sqrt{8}$ или $8\sqrt{7}$?

Решење. Ако квадрирамо оба израза, добијамо: $(7\sqrt{8})^2 = 49 \cdot 8 = 392$ и $(8\sqrt{7})^2 = 64 \cdot 7 = 448$. Па је $8\sqrt{7} > 7\sqrt{8}$. $\square$

Пр. 3. Израчунај вредност израза: $\sqrt{(\sqrt{7}-7)^2} - (\sqrt{7}-7)$.

Решење. Обратимо пажњу на израз под кореном.

$$\sqrt{(\sqrt{7}-7)^2} - (\sqrt{7}-7) = |\sqrt{7}-7| - (\sqrt{7}-7) = ...$$

Па, с обзиром да је $\sqrt{7} < 7$, имаћемо:

$$... = -(\sqrt{7}-7) - \sqrt{7} + 7 = -2\sqrt{7} + 14. \ \square$$

Пр. 4. Покажи да је вредност израза $\dfrac{11\sqrt{3} - \sqrt{243} + 2\sqrt{75}}{3\sqrt{3}}$ природан број.

Решење. Једноставним разлагањем неких поткорених величина у датом изразу добијамо:

$$\frac{11\sqrt{3} - \sqrt{243} + 2\sqrt{75}}{3\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3} - \sqrt{81 \cdot 3} + 2\sqrt{25 \cdot 3}}{3\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 2 \cdot 5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 4$$

Дакле, вредност овог израза је заиста природан број! $\square$

Пр. 5. Реши једначину $|\sqrt{(x-2)^2}+3| = 8$.

Решење. С обзиром на дефиницију $\sqrt{a^2} = |a|$, ма шта ово a било, из једначине $|\sqrt{(x-2)^2}+3| = 8$ добијамо једначину $||x-2|+3| = 8$.

А одавде је: (1) $|x-2|+3 = 8$ и (2) $|x-2|+3 = -8$. Јасно је да једначина (2) нема решења, јер би било $|x-2| = -11$, а то је немогуће јер су апсолутне вредности позитивне.

Дакле, решавамо прву. Из $|x-2|+3 = 8$ је $|x-2| = 5$, тј. $x-2 = 5$ и $x-2 = -5$. Коначно, решења су $x_1 = 7$ и $x_2 = -3$. □

2. ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

1. Докажи да не постоји рационалан број чији је квадрат једнак 23.
2. Одреди најмањи природни број n такав да је број $\sqrt{2014 \cdot n}$ рационалан.
3. Докажи да је $\sqrt{\left(\frac{11}{5}-\sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{11}{5}+\sqrt{5}\right)^2} < 0$.
4. Упореди бројеве $6-\sqrt{6}$ и $2+\sqrt{2}$.
5. Докажи да је $\dfrac{5-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}{5+\sqrt{6+\sqrt{6}}} > \dfrac{1}{4}$.
6. Да ли је број $\dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+1} - 1 + \sqrt{5}$ рационалан или ирационалан?
7. Докажи да је нетачна тврдња: $\dfrac{1}{\sqrt{101}} + \dfrac{1}{\sqrt{102}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{200}} > 10$.
8. На странама коцкице за игру написани су бројеви: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{1}{7}, -\sqrt{11}, 7, \frac{2}{5}$. Никола баца коцку два пута и бележи производ добијених бројева. Колико разичитих резултата који су рационални бројеви може добити?
9. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $3x^2 + y^2 = 21$.
10. Постоје ли неки бројеви x и y такви да је $x^2 + 10y^2 = 201720172017$?