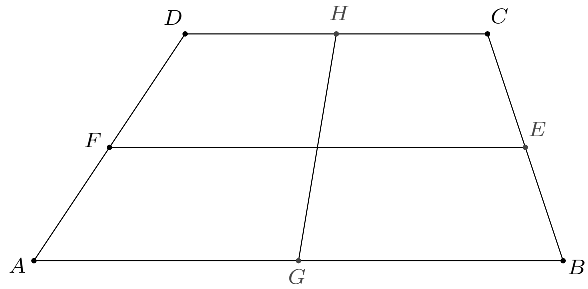
Друга средња линија трапеза и неки издвојени задаци примене

Вељко Ћировић
Ваљево, октобар 2014.

У овом чланку се дефинише појам Друге средње линије трапеза и наводе се нека њена својства. Након тога приказана су и решења неких интересантних проблема који се односе на Другу средњу линију и геометрију трапеза.

Дефиниција. Дуж која је одређена средиштима основица трапеза је *друга средња линија тог трапеза.*

На следећој илустрацији, тачкама E и F одређена је прва, а тачкама G и H одређена је друга средња линија трапеза.



Наводимо неколико особина Друге средње линије трапеза, користећи притом ознаке уведене на претходној илустрацији.

Дужина друге средње линије трапеза није једнака полузбиру кракова, али важи једна веома значајна векторска једнакост, која је у векторском смислу аналогон везе прве средње линије и основица.

Особина 1. Важи $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}\right)$

Доказ. Јасно је да је $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG}$, као и с друге стране $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG}$. А одавде је

$$2\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{0}$$

Односно $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}\right)$. □

Особина 2. Четвороугао $EHFG$ је паралелограм.

Доказ. Дужи EH и FG су паралелне са BD као средње линије одговарајућих троуглова над дијагоналом трапеза. Слично, HF и GE су паралелне са дијагоналом AC, па су и међусобно паралелне. Одавде следи да је четвороугао $EHFG$ паралелограм □

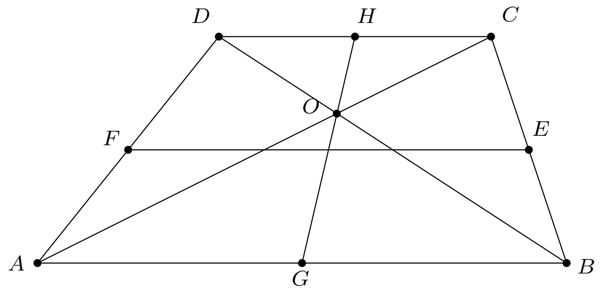
Овај паралелограм је тзв Паралелограм Варињона [1].

Последица. Средње линије трапеза се полове.

Особина 3. Друга средња линија трапеза садржи тачку пресека дијагонала трапеза.

Доказ. Нека је $CH = HD$. Парови троуглова DOH и GBO, као и CHO и AGO су слични.

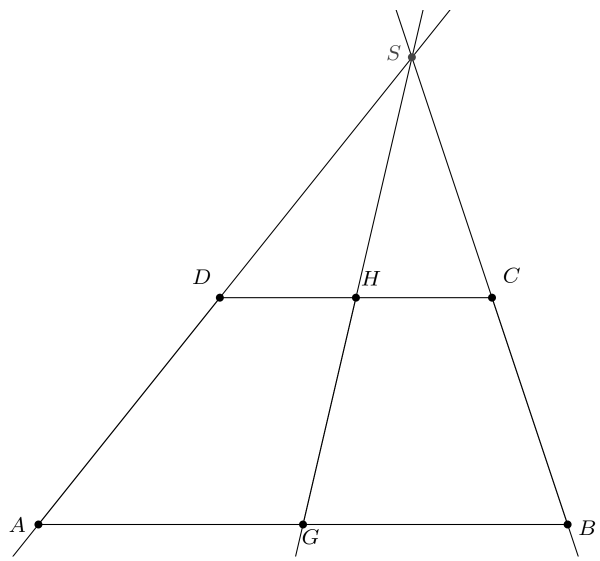
[1] Пјер Варињон, 1654.-1722. Француски математичар и механичар.



Па важе одговарајући односи међу страницама: $\dfrac{HD}{GB} = \dfrac{HO}{OG}$, а такође и $\dfrac{CH}{AG} = \dfrac{HO}{OG}$. Одакле, једноставно добијамо да је $\dfrac{HD}{GB} = \dfrac{CH}{AG}$. Па пошто смо претпоставили да је $CH = HD$ добијамо и $AG = GB$, што је и требало показати. $\square$

Особина 4. Права која садржи средњу линију трапеза пролази кроз заједничку тачку правих које садрже краке трапеза.

Доказ. Изведимо решење коришћењем вектора.



Троуглови SDC и SAB су слични, па важи $\overrightarrow{SA} = k\overrightarrow{SD}$ и $\overrightarrow{SB} = k\overrightarrow{SC}$ за неко $k \in R$.

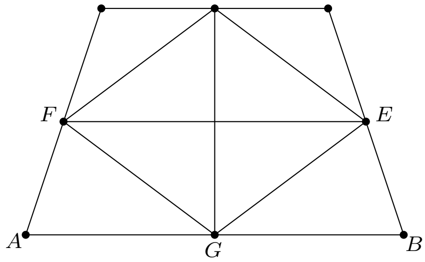
Али, у ова два троугла важе и релације: $\overrightarrow{SH} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SC}\right)$ и

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}\right) = \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{SD} + k\overrightarrow{SB}\right) = k\overrightarrow{SH}$$

Што показује да су ова два вектора колинеарна, а одатле следи и тврђење задатка. $\square$

Особина 5. Код једнакокраког трапеза средње линије су међусобно ортогоналне.

Доказ. Уочавамо да су FH и GE паралелне са AC, као и EH и GF са BD, као средње линије одговарајућих троуглова над дијагоналама трапеза. Овде такође важи
$FH = GE = \dfrac{1}{2}AC$ и $GF = EH = \dfrac{1}{2}BD$.



Па из чињенице да је трапез једнакокрак и једнакости његових дијагонала следи да је четвороугао $EHFG$ ромб, па су његове дијагонале ортогоналне, што је и требало доказати. $\square$

Наводимо без доказа следећу

Особина 6. Важи обрат у тврђењу особине 5.

Особина 7. Ако су средње линије трапеза међусобно једнаких дужина онда су дијагонале трапеза међусобно ортогоналне.

Решење. Четвороугао $GEHF$ је, према доказаном, паралелограм. А како су његове дијагонале једнаких дужина, то је овај четвороугао правоугаоник, и како је $EH \parallel BD$ и $GE \parallel AC$ одавде следи да су дијагонале ортогоналне. $\square$

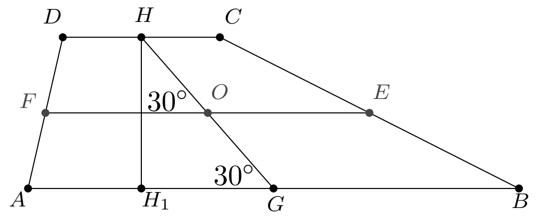
Наводимо без доказа следећу

Особина 8. Важи обрат у тврђењу особине 7.

ЗАДАЦИ

Задатак 1. Ако су дужине основица трапеза једнаке 20 cm и 12 cm, а друге средње линије 8 cm и угао који заклапају средње линије 30°, одредити површину трапеза.

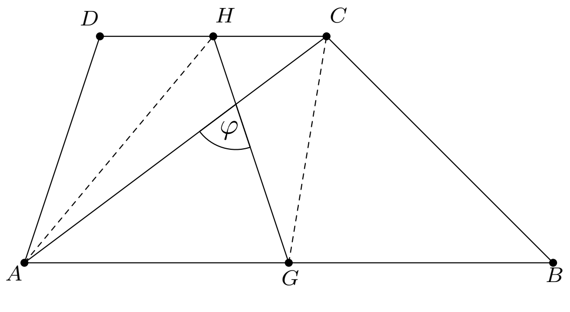
Решење. Пошто су углови $\angle FOH$ и $\angle H_1GO$ међусобно једнаки, као углови трансверзале, и износе 30°, то следи да је висина овог трапеза једнака половини његове друге средње линије.



Дакле, $H_1H = 4\ cm$ и $P = \dfrac{20+12}{2} \cdot 4 = 64\ cm^2$. $\square$

Задатак 2. Површина трапеза једнака је производу друге средње линије, дијагонале трапеза и синуса угла између њих.

Решење. За произвољан трапез $ABCD$ Уочимо трапез $AGCH$, одређен са два несуседна темена A и C и средиштима основица.



Једноставно се показује да је површина трапеза $ABCD$ једнака двострукој површини трапеза $AGCH$. А пошто је $P_{AGCH} = \dfrac{1}{2} GH \cdot AC \sin\varphi$, то отуда следи и $P_{ABCD} = GH \cdot AC \sin\varphi$, што је и требало показати. $\square$

Задатак 3. Површина трапеза једнака је производу друге средње линије и збира дужина нормала из два несуседна темена трапеза на њу.

Задатак 4. Ако је збор углова на краћој основици трапеза једнак 270° изразити дужину друге средње линије трапеза у зависности од дужина основица a и b.

Задатак 5. Ако је површина трапеза P колика је површина четвороугла $EHFG$?

Решење. Једнака је половини површине трепеза. □

Задатак 6. Ако су средње линије трапеза једнаких дужина, онда тачке E, F, G и H леже на кругу.

Литература

[1] И. А. Кушнир, «Вторая средняя линия трапеции», Журнал "Математика в школе", №2, 1993.

[2] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии, Наука, Москва, 1986.

[3] З. Лучић, Еуклидска и хиперболичка геометрија, Графити и Математички факултет, Београд 1994.