V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

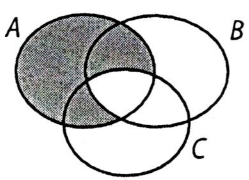
1. Како је $473 = 11 \cdot 43$ [**10 бодова**] и како су оба чиниоца прости бројеви, закључујемо да је једино могао да промени редослед цифара у броју 43. Тражени производ је $11 \cdot 34 = 374$ [**10 бодова**].

2. Број је дељив са 6 ако је дељив са 2 и са 3. Последња цифра 5 мора се уклонити да би број био паран [**6 бодова**]. Сада из броја 12791234 треба уклонити једну цифру тако да збир преосталих цифара буде дељив са 3. То се може постићи само уклањањем цифре 2 [**7 бодова**]. Да бисмо добили највећи број, треба уклонити прву двојку. Дакле, тражени број је 1791234 [**7 бодова**].

3. (**МЛ 52/2**) Како су 7 и 11 прости бројеви, дати квадри морају бити димензија $1 \times 1 \times 7$, односно $1 \times 1 \times 11$ [**5 бодова**]. Разлика њихових површина једнака је разлици површина њихових омотача, дакле $4 \cdot 4x = 16x$, где је x површина једне стране сваке коцке. Из $16x = 256\text{cm}^2$, добијамо да је $x = 16\text{cm}^2$ [**10 бодова**]. Површина једне коцке је $6 \cdot 16\text{cm}^2 = 96\text{cm}^2$ [**5 бодова**].

4. (**МЛ 50/5**) Прва цифра другог броја мора бити парна. Ако је она једнака 2, онда је последња цифра првог броја 1, а тражени збир је тада најмањи у случајевима $301 + 245 = 546$ и $341 + 205 = 546$ [**5 поена**]. Ако је прва цифра другог броја 4, онда је последња цифра првог броја 2, а тражени збир је најмањи у случајевима $102 + 435 = 537$ и $132 + 405 = 537$ [**10 поена**]. У случајевима када је прва цифра другог броја 6 или 8 добијају се збирови већи од 700 [**5 поена**]. Дакле, најмањи тражени збир је 537.

5. Број елемената скупа $A \setminus (A \cap B \cap C)$, једнак је разлици броја елемената скупа A и броја елемената скупа $A \cap B \cap C$ [**6 поена**]. Скуп A има 504 елемента (толико има бројева мањих од 2018 који су дељиви са 4) [**4 поена**]. Скуп $A \cap B \cap C$ има 33 елемента (толико има бројева мањих од 2018 који су дељиви са 60 = НЗС(4, 6, 15)) [**8 поена**]. Тражени број је $504 - 33 = 471$ [**2 поена**].



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 24.02.2018 – V разред

1. Пера је множио природне бројеве x и y ($x, y > 1$) и добио резултат 473. Његов наставник је утврдио да је резултат погрешан јер је у једном од бројева променио редослед цифара. Колико је $x \cdot y$?

2. Које цифре треба уклонити из броја 127912345 да би се добио највећи могући број дељив са 6?

3. Два квадра су састављена од 7, односно 11 једнаких коцки. Ако се површине тих квадара разликују за 256cm^2 израчунај површину једне од коцки.

4. Два троцифрена броја имају свих 6 цифара различитих. Прва цифра другог броја једнака је двострукој последњој цифри првог броја. Који је најмањи могући збир таква два броја?

5. Нека је A скуп природних бројева мањих од 2018 који су дељиви са 4, B скуп природних бројева мањих од 2018 који су дељиви са 6 и C скуп природних бројева мањих од 2018 који су дељиви са 15. Одреди број елемената скупа $A \setminus (A \cap B \cap C)$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

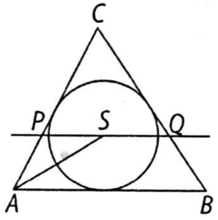
VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Претпоставимо да је то могуће. Нека је свако од њих добио различит број бомбона. Због чињенице да је $1 + 2 + 3 + ... + 64 = 32 \cdot 65 = 2080$, а да је на располагању 2018 бомбона, закључујемо да није могуће да сви добију различит број бомбона [**20 поена**. Не признавати одговор „не" без образложења.].

2. (**МЛ 51/5**) Из $AD = 6cm$ и $AD + AA_1 = 17cm$ се добија да је $AA_1 = 11cm$ [**5 поена**]. Даље је $A_1B = AA_1 - AB = 5cm$ [**5 поена**]. Због симетрије је $AB_1 = A_1B = 5cm$, $B_1B = 1cm$ и $B_1E = 0{,}5cm$ [**5 поена**]. Тражени обим правоугаоника $AEFD$ износи $2 \cdot (6cm + 5{,}5cm) = 23cm$ [**5 поена**].

3. (**МЛ 50/2**) Важи $\measuredangle SAB = \measuredangle PSA$ (са паралелним крацима) [**5 поена**] и $\measuredangle SAB = \measuredangle SAP$ (симетрала угла), па је $\measuredangle PSA = \measuredangle SAP$, тј. троугао ASP је једнакокрак ($PS = PA$) (слика) [**10 поена**]. Слично је $QS = QB$, па је тражени обим $CP + PQ + QC = CP + PS + SQ + QC = CP + PA + BQ + QC = CA + CB = 27cm$ [**5 поена**].



4. Важи $A = \frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2017} = 1 - \frac{1}{2018} + 1 + \frac{1}{2017} = 2 + \frac{1}{2017 \cdot 2018}$, и слично, $B = 2 + \frac{1}{17 \cdot 18}$ [**15 поена**]. Из $\frac{1}{2017 \cdot 2018} < \frac{1}{17 \cdot 18}$, следи $A < B$ [**5 поена**].

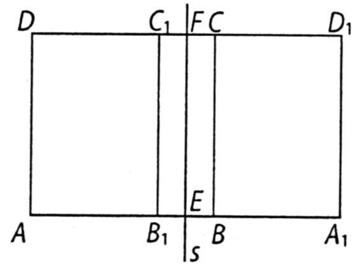
5. Означимо тражене узастопне бројеве са $a < b < c < d$. Пошто је a дељив са 2, такав је и c, па како је он дељив са 5, значи да је дељив са 10, тј. завршава се нулом [**5 поена**]. Следи да се број d завршава јединицом [**5 поена**], а како је он дељив са 7, мора бити облика $d = 7x$, где се x завршава цифром 3 [**5 поена**]. За $x = 3$ добијају се бројеви 18, 19, 20, 21, а за $x = 13$ добијају се бројеви 88, 89, 90, 91 који не задовољавају услове задатка. За $x = 23$ бројеви 158, 159, 160, 161 су тражени [**5 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
24.02.2018 – VI разред

1. У једном разреду има 64 ученика. Може ли се 2018 бомбона поделити ученицима тог разреда тако да сваки ученик добије различит број бомбона и ниједан ученик не остане без бомбона?

2. Квадрати $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ су осно симетрични у односу на праву s (види слику). Ако је обим квадрата $ABCD$ једнак 24cm и обим правоугаоника AA_1D_1D једнак 34cm колики је обим правоугаоника $AEFD$?



3. Тачка S је центар круга уписаног у троугао ABC, $AC = 13cm$, $BC = 14cm$. Права a која садржи тачку S и паралелна је страници AB сече AC и BC редом у тачкама P и Q. Израчунај обим троугла CPQ.

4. Који је број већи, $\frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2017}$ или $\frac{17}{18} + \frac{18}{17}$?

5. Одреди четири најмања узастопна природна броја таква да је први дељив са 2, други са 3, трећи са 5 и четврти са 7.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 51/5) $\left(\frac{9^{10}\cdot(-4)^{25}\cdot 18^{100}}{8^{50}\cdot(-3)^{220}}\right)^{2017}+\left(\frac{12^{100}\cdot 3^{100}}{(-6)^{200}}\right)^{2018}=$

$\left(-\frac{3^{20}\cdot 2^{50}\cdot 2^{100}\cdot 3^{200}}{2^{150}\cdot 3^{220}}\right)^{2017}+\left(\frac{2^{200}\cdot 3^{100}\cdot 3^{100}}{2^{200}\cdot 3^{200}}\right)^{2018}$ **[10 поена]** $=-1+1=0$ **[10 поена]**.

2. (МЛ 52/1) Троуглови ABC и ADC имају једнаке висине, па из услова задатка следи да је $CD=\frac{1}{3}\cdot AB=4\text{cm}$ **[7 поена]**. Како су познате дужине основица и крака, применом Питагорине теореме добијамо да је висина трапеза 3cm **[7 поена]**, па је његов обим 26cm **[3 поена]**, а површина 24cm^2 **[3 поена]**.

3. Последње цифре бројева $1^1, 2^2, 3^3, ..., 9^9, 10^{10}$ су, редом, 1, 4, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0 **[10 поена]**, па је последња цифра датог збира једнака последњој цифри збира, $1+4+7+6+5+6+3+6+9+0=47$, дакле 7 **[10 поена]**.

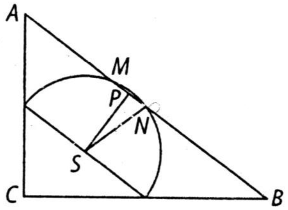
4. Како је $B-A=2\cdot(2+4+6+...+2018)$ **[8 поена]**

$$=4\cdot(1+2+3+...+1009)$$

$$=4\cdot\frac{1009\cdot 1010}{2}=2\cdot 1009\cdot 1010$$ **[8 поена]**,

то је $\frac{B-A}{1010}=2018$ **[4 поена]**.

5. Дужина хипотенузе AB је 10cm, па је дужина поменуте средње линије 5cm, а полупречник кружнице $SN=2{,}5\text{cm}$ **[7 поена]**. Висина троугла ABC је $\frac{AC\cdot BC}{AB}=4{,}8\text{cm}$, па је растојање SP средишта S средње линије од тетиве MN једнако половини те висине, дакле 2,4cm **[7 поена]**. Из правоуглог троугла SPN добијамо да је $PN^2=SN^2-SP^2=(2{,}5\text{cm})^2-(2{,}4\text{cm})^2=0{,}49\text{cm}^2$, па је $PN=0{,}7\text{cm}$ и $MN=2\cdot PN=1{,}4\text{cm}$ **[6 поена]**.

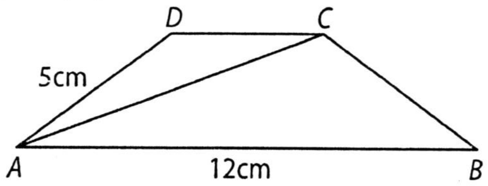


Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
24.02.2018 – VII разред

1. Израчунај вредност израза $\left(\frac{9^{10}\cdot(-4)^{25}\cdot 18^{100}}{8^{50}\cdot(-3)^{220}}\right)^{2017}+\left(\frac{12^{100}\cdot 3^{100}}{(-6)^{200}}\right)^{2018}$.

2. На слици је приказан једнакокраки трапез $ABCD$. Ако је површина троугла ABC три пута већа од површине троугла ACD израчунај обим и површину трапеза $ABCD$.



3. Одреди последњу цифру збира

$$1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9+10^{10}.$$

4. Ако је

$$A=1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+2017\cdot 2018$$

и

$$B=2\cdot 3+4\cdot 5+6\cdot 7+...+2018\cdot 2019,$$

израчунати вредност израза $\frac{B-A}{1010}$.

5. Кружница чији је пречник средња линија паралелна хипотенузи AB правоуглог троугла ABC сече хипотенузу у тачкама M и N. Ако су катете троугла $AC=6\text{cm}$ и $BC=8\text{cm}$, израчунај дужину дужи MN.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа

24.02.2018 – VIII разред

1. Одреди збир свих решења једначине
$$||1-2\cdot 3|-|4\cdot 5-6\cdot x||=7.$$

2. Израчунај вредност израза
$$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right).$$

3. У унутрашњости квадрата $ABCD$ конструисан је полукруг над пречником AB. Нека је E тачка странице BC таква да је DE тангента на овај полукруг. У којој размери тачка E дели страницу BC?

4. Правилна шестострана једнакоивична призма ивице 4cm пресечена је са равни која садржи дужу дијагоналу једне основе и њој паралелну основну ивицу друге основе. Израчунај површину насталог пресека.

5. У једнакости
$$(A+B)\cdot(C+D)\cdot(E+F)\cdot(G+H)=5005$$
слова заменити бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (различита слова различитим бројевима) тако да се добије тачна једнакост. На колико начина се то може урадити?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

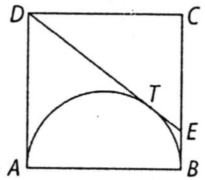
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. **(МЛ 50/2)** Једначина је еквивалентна са $|5-|20-6x||=7$, тј. $5-|20-6x|=7$ или $5-|20-6x|=-7$ [**5 поена**]. Прва једначина нема решења (разлика броја 5 и ненегативног броја не може бити једнака 7) [**5 поена**]. Друга се своди на $|20-6x|=12$, тј. $20-6x=12$ или $20-6x=-12$ [**5 поена**]. Решења су $\frac{4}{3}$ и $\frac{16}{3}$, а њихов збир $\frac{20}{3}$ [**5 поена**].

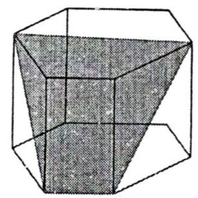
2. $$\begin{aligned}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})&=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\\&=1+2+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\\&=6\ [\textbf{20 поена}].\end{aligned}$$

[Напомена: Може се користити и формула за квадрат тринома.]

3. Нека је T додирна тачка тангенте DE и полукруга и a дужина странице квадрата. Како су одговарајуће тангентне дужи међусобно једнаке имамо да важи $DA=DT=a$ и $EB=ET=x$ [**7 поена**]. Сада у троуглу DEC важи: $a^2+(a-x)^2=(a+x)^2$ [**7 поена**]. Одавде је $a^2+a^2-2ax+x^2=a^2+2ax+x^2$, односно $a^2=4ax$, одакле је $a=4x$. Дакле, тражена размера је $BE:EC=1:3$ [**6 поена**].



4. **(МЛ 50/2)** Пресек је једнакокраки трапез [**5 поена**] са основицама дужине 8cm (пречник описаног круга једне основе) и 4cm (страница друге основе) и краком дужине $4\sqrt{2}$cm (дијагонала бочне стране) [**5 поена**]. За висину h тог трапеза се добија $h^2=(4\sqrt{2}\text{cm})^2-(2\text{cm})^2=28\text{cm}^2$, па је $h=2\sqrt{7}$cm [**5 поена**], а површина трапеза је $12\sqrt{7}\text{cm}^2$ [**5 поена**].



5. Број 5005 се раставља на просте чиниоце као $5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, па сваки од збирова у наведене четири заграде мора бити једнак једном од бројева 5, 7, 11 или 13 [**4 поена**]. Постоје два начина да се то оствари: $8+5=13, 7+4=11, 6+1=7, 3+2=5$ [**4 поена**] и $7+6=13, 8+3=11, 5+2=7, 4+1=5$ [**4 поена**]. У сваком од та два случаја, фактори могу променити места на $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ начина [**4 поена**], а у сваком збиру, сабирци могу заменити места на 2 начина, па је укупан број начина да се добије тачна једнакост $2\cdot 24\cdot 2^4$ [**4 поена**]= 768.